学校编号： 10384　　分类号： _____ 密级： _____
学号： B200223005　　UDC: _____

# 厦 门 大 学
# 博 士 学 位 论 文

# 三类合成图的性质及其在互连网络通信上的应用

Properties of There Kind Composited Graphs and Its Applications on Communication of Interconnection Networks

徐 慧 植

指导教师姓名： 肖文俊 教授

专 业 名 称： 基 础 数 学

论文提交日期： 2005 年 4 月

论文答辩日期： 2005 年 6 月

学位授予日期： 2005 年 月

答辩委员会主席： _______________

评 阅 人： _______________

2005 年 4 月

# 厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　月　日

# 摘　要

众所周知，由已知的几个图按照图的运算合成新的图是构造图的重要方法，研究合成图的性质与因子图的性质之间的关系是一项非常有意义的工作. 全文共分为六章，围绕图的直积、字典积和冠进行讨论，主要研究这三类合成图的性质，并讨论了基于直积互连网络的通信算法. 下面是本文的一些主要结果：

1. 第二章中，证明了图的直积满足交换律和结合律，推广了图的直积的 Wiener 指数的计算公式.

2. 第三章中，首先给出了字典积的直径和连通度与因子图的直径和连通度的关系，然后证明了字典积的 Laplacian 谱与因子图的 Laplacian 谱的相关关系，最后给出了字典积的等周数的一个估计.

3. 第四章中，证明了冠的 Laplacian 谱与因子图的 Laplacian 谱的相关关系.

4. 第五章中，给出了由路和圈构成的合成图的一些性质，研究了与路和圈相关的几个多项式和行列式的性质.

5. 第六章中，给出了网格和一般直积网络上的一个新的虫孔路由算法.



**关键词**：合成图， Laplacian 谱，路由算法

# Abstract

It is now well known that it is an important method to composite a new graph according to graphs' operations by some known graphs, and it is a very interesting job to study the relations between properties of the composited graph and that of its factor graphs. The paper contains six chapters. It centres on product of graphs, lexicographic product of graphs and corona of graphs, and mainly study properties of these kinds of composited graph and communication algerithm of interconnection networks based on product of graphs. Here are some of main results in this paper:

1. In Chapter 2, we prove that the product of graphs satisfites commutative law and associative law, and improve computing formula of products' Wiener Index .

2. In Chapter 3, we first give the relation between the diameter and connectivity of the lexicographic product of two graphs and that of factor graphs, then we prove the relation between the Laplacian spectrum of the lexicographic product of two graphs and that of factor graphs, at last we give an estimation of isopermetric number of the lexicographic product of two graphs.

3. In Chapter 4, we prove the relation between the Laplacian spectrum of the corona of two graphs and that of factor graphs.

4. In Chapter 5, we give some properties of graphs composited by paths and circuits, and study the properties of polynomial and determinant related with paths and circuits.

5. In Chapter 6, we give a new wormhole-routed algorithm for meshes and general producted networks.

**Key Words:** composited graph, Laplacian spectrum, routing algorithm

# 目　　录

# Contents

# 序　言

由已知的几个图按照图的运算合成新的图是构造图的重要方法，研究合成图的性质与因子图的性质之间的关系是一项非常有意义的工作．本文对三类合成图：直积、字典积和冠展开讨论，主要研究合成图的 Laplacian 谱、直径、连通度、等周数、 Wienner 指数、 Kirchhoff 指数等性质.

图 $G$ 的顶点度矩阵与其邻接矩阵的差称为图 $G$ 的 Laplacian 矩阵，记作 $L(G)$, 即 $L(G) = D(G) - A(G)$, 称 $L(G)$ 的特征值为图 $G$ 的 Laplacian 谱. 图的 Laplacian 矩阵的研究已有很长的历史， Kirchhoff 在研究电网络时 (1847 年) 证明了著名的矩阵树定理．研究发现图的 Laplacian 矩阵的特征值与图的很多不变量有关系, 如直径 ([23]) 、连通度 ([49]) 、等周数 ([16]) 、Kirchhoff 指数 ([12]) 等．文献 [2] 和 [22] 是两本关于图的谱的专著．目前对图的 Laplacian 谱的研究分为三个方面： (1) 图的 Laplacian 谱与图的其它性质的联系； (2) 图的 Laplacian 谱的估计, 特别是次小特征值的估计；(3) 特殊图的 Laplacian 谱．国内学者洪渊教授和李炯生教授围绕 (1) 和 (2) 做出了很多好的结果, 见文献 [27] 、 [32] 、 [35] 、 [38] 、 [40] 等．文献 [2] 中解决了图的直积的 Laplacian 谱的问题，本文第三章和第四章解决了字典积和冠的 Laplacian 谱的问题.

一个连通图 $G$ 中不同顶点之间所有距离的最大值叫做图 $G$ 的直径，记作 $d(G)$. 不难理解，直径是计算机通信网络的有效性和可靠性的一个重要参数. 但在图论上，计算直径至今还没有一个好的算法. 研究发现图的直径与图的次小 Laplacian 谱相关 ([23]), 而且对直径的估计的研究仍然十分活跃 ([36]). 关于合成图的直径，徐俊明教授在文献 [6] 中证明了直积图的直径是其所有因子图直径之和．本文第三章给出了图的字典积的直径的一个结果.

图的连通性是图论中的重要概念之一, 图的许多性质与图的连通性相关,

图的点连通度和边连通度就是作为衡量图的连通性的两个参数. 图的连通性还在计算机网络、电网络和通信网络等许多方面都有重要应用. 例如网络拓扑的健壮性, 是指网络中一些顶点或边遭到破坏时, 能否保持网络的连通性的问题. 图的连通性就是这方面的一个度量. 关于合成图的连通度, 徐俊明教授在文献 [6] 中证明了直积图的连通度大于或等于其所有因子图的连通度之和. 本文第三章给出了图的字典积的连通度的一个结果.

设集合 $X$ 和 $Y$ 是图 $G$ 顶点集 $V(G)$ 的子集，令

$$E(X,Y)=\{(u,v)\in E(G)\mid u\in X, v\in Y\}$$

记 $\partial X=E(X,\bar{X})$, 其中 $\bar{X}$ 表示 $X$ 在 $V(G)$ 中的补集. 称量 $\min\limits_{X}\frac{|\partial X|}{|X|}$ 为图 $G$ 的等周数，记作 $i(G)$, 其中 $X$ 取遍所有 $|X|\leq\frac{1}{2}|V(G)|$ 的非空子集. 计算图的等周数是一个 NP-hard 的问题 ([16]).

等周数来源于几何学中的等周问题，几何中的等周问题是古希腊数学家所研究的最早问题之一, 即在定长的闭曲线中求一闭曲线, 使之围成的面积最大. 图的等周问题本质上与此相同. Mohar([16]) 类似于 Riemann 流形研究中得到 Cheeger 不等式的方法，细致分析图 $G$ 的次小 Laplacian 谱 $\lambda_2(G)$ 的特征向量的正负分量和图的边割之间的关系，得到了用 $\lambda_2(G)$ 来估计 $i(G)$ 的不等式，此不等式是 Riemann 流形上 Laplacian 算子研究中的 Cheeger 不等式的离散类似, 因而也称为 Cheeger 型不等式. Mohar([16]) 还给出了两个图的直积的等周数的估计，金芳蓉教授 ([21]) 推广了 Mohar 的结果，证明了有限个图的直积的等周数也有类似的估计. 此外, 金芳蓉教授在图的等周数方面还做出了很多好的工作 (见文献 [19-21]). 本文第三章给出了图的字典积的等周数的一个估计，而且通过对一些具体图的字典积的等周数的计算结果的观察和分析，我们还对图的字典积的等周数的下界提出了一个猜想.

称连通图 $G$ 的所有顶点距离总和的一半为图 $G$ 的 Wiener 指数，记做 $W(G)$. Wiener 指数最早是由 Wiener 于 1947 年定义的，现在 Wiener 指数不

仅是图论的研究方向之一，而且在化学中有重要应用，因此 Wiener 指数也是化学学科的重要研究课题. Ivan Gutman 等在文献 ([47]) 、D.M.Cvetkovic 等在文献 ([2]) 都讨论了 Wiener 指数在化学中的一些应用. 然而，计算 Wiener 指数却是一个 NP-hard 的问题 ([51]).

Ivan Gutman 在图的 Wiener 指数方面作出了很多好的工作，在文献 [13] 中 Yeong-Nan Yeh 和 Ivan Gutman 解决了所有合成图的的 Wiener 指数的问题；在文献 [47] 中 Ivan Gutman 等人研究了树的 Wiener 指数及其应用；在文献 [55] 中 Ivan Gutman 等人研究了六角系统的 Wiener 指数.

本文第二章中,利用直积的结合律和数学归纳法,把两个图的直积的 Wiener 指数计算公式推广到了多个图的直积的情形.

在电网络和化学图论中，把图 $G$ 的每条边看作单位电阻器，根据物理学中欧姆定律计算出的顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 间的电阻值，称为 $v_i$ 和 $v_j$ 间的有效电阻，或阻力距离 (resistance distance), 记作 $r_{ij}$. 称连通图 $G$ 的所有顶点间的有效电阻总和的一半为 $G$ 的 Kirchhoff 指数，记作 $R(G)$.

Kirchhoff 指数最早是由 Klein 和 Randic([52]) 于 1993 年在研究阻力距离时，类似于 Wiener 指数而定义的. 同 Wiener 指数一样， Kirchhoff 指数也引起许多数学家和化学家的浓厚兴趣. Lovasz([14]) 利用矩阵和概率的方法，得到了一个可逆矩阵 “ $Z$ ”, 奠定了解决有效电阻的基础，肖文俊教授和 Ivan Gutman([43],[44]) 解决了阻力距离和阻力矩阵方面的很多问题，同时也得到了 Kirchhoff 指数的计算方法， B.Bapat 、 Ivan Gutman 和肖文俊教授 ([45]) 最终完全解决了阻力距离的计算问题.

本文得到了一些合成图的 Kirchhoff 指数的估计.

作为合成图的应用之一，我们计算了路、圈的合成图的 Laplacian 谱和 Kirchhoff 指数.

图与互连网络密切相关，图是互连网络拓扑结构的数学模型，我们可以通

过图论的方法研究互连网络的拓扑结构. 互连网络的结点相互通信才能使网络真正发挥作用，互连网络的通信是指网络中结点互相交换信息，通信中乐于使用消息这一术语，它是结点间通信的逻辑单位. 在信息传输过程中，消息从发源地到达目的地所取的走法，称为选路，或路由；消息向下一结点传递所采用的技术称为开关技术. 选路加上开关技术就构成互连网络通信的路由算法. 早期的网络常采用存储转发 (store and forward) 开关技术，为减少数据传输时间， Kermani 和 Kleinrock([56]) 提出了切通 (cut-through) 技术，其中虫孔 (wormhole) 选路是研究和应用最广泛的一种切通技术.

虫孔选路与存储转发选路相比: 前者的通信延迟 (communication latency) 时间与源和目的之间的距离无关；而后者的通信延迟时间与源和目的之间的距离成正比. 因此，现代的互连网络一般都采用虫孔选路方法.

网络中按通信的结点规模构成各种通信操作. 在众多通信操作中，多到多个人 (all-to-all personalized) 通信处于核心地位. 多到多个人通信也叫做全交换 (total exchange). 所谓多到多个人通信指的是每个结点发送各自彼此不同的大小相同的信息包给其余结点. 因此全交换是高度稠密的通信操作. 常用的通信操作，例如广播 (broadcast) 、多播 (multicast) 、闲聊 (gossiping) 等，都是特殊的全交换.

上世纪末和本世纪初，众多学者致力于网格和环面的路由算法的研究. L.M.Ni([56]) 和 P.K.McKinley([56],[57]) 主要致力于超立方体上的虫孔路由算法研究， Yuanyuan Yang 和 Jiancao Wang([64],[65]) 主要致力于网格上的存储转发路由算法研究， Y.J.Suh 和 S.Yalamanchili([64],[68]) 在网格和环面的全交换虫孔算法作了大量研究， Yu-Chee Tseng 和 Gupta 在文献 [61] 中用阶段的序列安排通信，给出了环面的一个新的全交换虫孔路由算法. 本文第六章也采用阶段的序列安排通信，给出了网格和一般直积网络上的一个新的全交换虫孔路由算法.

# 第一章　基本概念

为了便于理解和行文方便，本章先介绍图论和线性代数中与本文相关的一些概念和符号，这些基本概念都可在文献 [1,3,4,11] 中找到；然后叙述一些经典而且常用的基本结论.

## §1.1　图论的基本概念

**定义** 1.1.1:　设 $V$ 是集合，称 $V$ 的所有无序元偶的集合

$$V\cdot V=\{(u,v)\mid u,v\in V\}$$

为 $V$ 和 $V$ 的无序积.　(所谓 $(u,v)$ 是无序元偶，指的是 $(u,v)=(v,u)$ )

称 $V$ 的所有有序元偶的集合

$$V\times V=\{(u,v)\mid u,v\in V\}$$

为 $V$ 和 $V$ 的笛卡儿积. 记 $V_0=\{(v,v)\mid v\in V\}$.

**定义** 1.1.2:　称一对集合 $V$ 和 $E$ 为一个无向图 $G$, 记作 $G=\langle V,E\rangle$, 如果 $V$ 是一个非空集 (除非特别说明，我们一般都只考虑 $V$ 为有限集), 而 $E$ 是 $V\cdot V$ 的一个子集. 我们把集合 $V$ 的元素叫做图 $G$ 的顶点 (结点), 集合 $E$ 的元素叫做图 $G$ 的边.

上述定义中，若 $E\subset V\cdot V\backslash V_0$, 则称 $G=\langle V,E\rangle$ 为简单无向图；若 $E$ 为 $V\times V$ 的子集，则称 $G=\langle V,E\rangle$ 为有向图，其中集合 $V$ 的元素也叫做图 $G$ 的顶点 (结点), 而集合 $E$ 的元素叫做图 $G$ 的弧 (有向边); 若 $E\subset V\times V\backslash V_0$ , 则称 $G=\langle V,E\rangle$ 为简单有向图.

设 $G=\langle V,E\rangle$ 是一简单无向图，$\forall\, u,v\in V$, 若 $(u,v)\in E$, 即 $\exists\, e\in E$, 使得 $(u,v)=e$ 则称顶点 $u,v$ 邻接，且为边 $e$ 的端点.　$V$ 中所有元素按邻接关系构成一个矩阵，称为图 $G$ 的邻接矩阵，记做 $A(G)$, $A(G)$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素 $a_{ij}=1$, 如果 $V$ 中第 $i$ 个顶点与第 $j$ 个顶点邻接，否则 $a_{ij}=0$, 其中 $i,j=1,2,\cdots,|V|$. 以后常把 $A(G)$ 简记为 $A$.

$\forall\ v \in V$ , 称所有与顶点 $v$ 邻接的顶点的数目为顶点 $v$ 的度，记做 $d(v)$. 记 $G$ 的最小度为 $\delta(G)$, 最大度为 $\Delta(G)$. 若图 $G$ 的每个顶点的度都相同，则称 $G$ 为正则图. $V$ 中所有顶点的度构成一个对角矩阵，称为图 $G$ 的顶点度矩阵，记做 $D(G)$, 以后常把 $D(G)$ 简记为 $D$

今后我们常用 $V(G)$ 表示图 $G$ 的全体顶点的集合，用 $E(G)$ 表示图 $G$ 的所有边的集合，用 $|V(G)|$ 表示图 $G$ 的顶点数，用 $|E(G)|$ 表示图 $G$ 的边数.

**定义** 1.1.3: 称图 $G$ 的顶点和边相间的序列

$$W = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2 \cdots v_{l-1}\ e_l\ v_l$$

为图的一个途，如果满足 $e_i = (v_{i-1}, v_i) \in E(G)$, 其中 $v_i \in V(G)$, $e_i \in E(G)$, $i = 1, 2, \cdots, l$. 又如果 $v_0 = v_1$, 则称 $W$ 为一闭途. 假如途 $W$ 中诸边 $e_1, e_2, \cdots, e_l$ 互不相同，则称途 $W$ 为迹，而若又有 $v_0 = v_1$, 则称 $W$ 为一闭迹. 又假若途 $W$ 中诸顶点 $v_0, v_1, \cdots, v_l$ 互不相同，则称途 $W$ 为路，而若 $v_0 = v_l$, 但 $v_1, \cdots, v_l$ 互不相同，则称 $W$ 为一圈.

由 $n$ 个顶点构成的路记为 $P_n$, 由 $n$ 个顶点构成的圈记做 $C_n$. $P_n$ 和 $C_n$ 是两类最基本、最重要的图.

如果 $G$ 的任意两个顶点之间都有一条路，则称图 $G$ 为连通图. 如果 $G$ 中存在一个圈，经过 $G$ 的每一顶点，而且只经过一次，则称此圈为图 $G$ 的 Hamiliton 圈；如果 $G$ 中存在一闭迹，包含 $G$ 的每一条边，则称此闭迹为图 $G$ 的 Euler 回路. $\forall\ u, v \in V$, $u \neq v$, 连接顶点 $u$ 和 $v$ 的路中边数最少的路的边数叫做顶点 $u$ 和 $v$ 间的距离，记做 $d(u, v)$ . 图 $G$ 中距离最大的两个顶点间的距离称为图 $G$ 的直径，记做 $d(G)$. 即 $d(G) = \max\limits_{u,\, v \in V(G)} d(u, v)$.

不含圈的连通图称为树. 显然 $P_n$ 为一树.

**定义** 1.1.4: 称连通图 $G$ 的所有顶点距离总和的一半为 $G$ 的 Wiener 指数，记做 $W(G)$. 即 $W(G) = \frac{1}{2} \sum\limits_{u, v \in V(G)} d(u, v)$.

Wiener 指数最早是由 Wiener 于 1947 年定义的，现在 Wiener 指数不仅

是图论的研究方向之一，而且在化学中有重要应用，因此 Wiener 指数也是化学学科的重要研究课题． Ivan Gutman 等在文献 ([47]), D.M.Cvetkovic 等在文献 ([2]) 都讨论了 Wiener 指数在化学中的一些应用．

然而，计算 Wiener 指数是一个 NP-hard 的问题 ([51])．

**定义** 1.1.5: 把图 $G$ 的每条边看作单位电阻器，根据物理学中欧姆定律计算出的顶点 $v_i$ 和 $v_j$ 间的电阻值，称为 $v_i$ 和 $v_j$ 间的有效电阻，或阻力距离 (resistance distance), 记作 $r_{ij}$. 称连通图 $G$ 的所有顶点间的有效电阻总和的一半为 $G$ 的 Kirchhoff 指数，记作 $R(G)$, 即 $R(G)=\sum\limits_{i<j} r_{ij}$. 称图 $G$ 的顶点间的有效电阻构成的对称矩阵为图 $G$ 的阻力矩阵，记作 $R$, 即 $R=(r_{i,j})$.

Kirchhoff 指数最早是由 Klein([52]) 于 1993 年在研究阻力距离时，类似于 Wiener 指数而定义的．同 Wiener 指数一样， Kirchhoff 指数也引起许多数学家和化学家的浓厚兴趣，研究发现阻力距离与随机过程理论中的随机游动有密切联系 ([14])．Lovasz([14]) 利用矩阵和概率的方法，得到了一个可逆矩阵 “ $Z$ ”, 奠定了解决有效电阻的基础，肖文俊教授和 Ivan Gutman([43],[44]) 解决了阻力距离和阻力矩阵方面的很多问题，同时也得到了 Kirchhoff 指数的计算方法， B.Bapat 、 Ivan Gutman 和肖文俊教授 ([45]) 最终完全解决了阻力距离的计算问题．

**定义** 1.1.6: 设 $G$ 为连通图，若存在非空集 $S\subset V(G)$ 使得 $G-S$ 不是连通的，则称 $S$ 为 $G$ 的分离集．具有最少顶点数的分离集叫做最小分离集．最小分离集中顶点数记为 $\kappa(G)$, 称它为图 $G$ 的连通度．即

$\kappa(G)=\min\{\ |S|\ |\ \emptyset\neq S\subset V(G)$, 且 $G-S$ 非连通 $\}$.

类似我们可以定义 $G$ 的边连通度 $\lambda(G)$, 即

$\lambda(G)=\min\{\ |B|\ |\ \emptyset\neq B\subset E(G)$, 且 $G-B$ 非连通 $\}$.

显然有 $1\leq\kappa(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)\leq\Delta(G)$.

**定义** 1.1.7: 图 $G$ 称为二部图，如果顶点集满足 $V(G)=V_1\bigcup V_2$, 且

$V_1 \bigcap V_2 = \emptyset$; 边集 $E(G) = \{(u,v) \in V_1 \cdot V_2 \mid u \in V_1, v \in V_2\}$. 二部图是一类非常重要的图，它还是一些重要不等式等号成立的特例 (见文献 [36],[37],[38]).

一个图可以由一个矩阵 (邻接矩阵) 完全刻画，因此矩阵是研究图论的重要方法.

**定义** 1.1.8: 设 $A$ 是一 $m \times n$ 实矩阵， $\lambda \in R$, 若存在非零向量 $\xi$, 使得 $A\xi = \lambda\xi$, 则称 $\lambda$ 是矩阵 $A$ 的特征值， $\xi$ 是对应特征值 $\lambda$ 的特征向量. 图 $G$ 的邻接矩阵 $A(G)$ 的特征值称做 $G$ 的谱; 图 $G$ 的顶点度矩阵与其邻接矩阵的差称为 $G$ 的 Laplacian 矩阵，记做 $L(G) = D(G) - A(G)$, 称 $L(G)$ 的特征值为图 $G$ 的 Laplacian 谱.

图的 Laplacian 矩阵的研究已有很长的历史， Kirchhoff(1847 年) 在研究电网络时，证明了著名的矩阵树定理. 研究发现图的 Laplacian 矩阵的特征值与图的很多不变量有关，如连通度 ([49]) 、直径 ([23]) 、等周数 ([16]) 、 Kirchhoff 指数 ([12]) 等等. 图的 Laplacian 谱不仅在数学和计算机通信网络 ([54]) 中得到了很好的应用和发展，甚至在自然科学的其它学科中也得到了很好的应用. 谱图理论在化学学科也有许多好的应用，如化学分子图的特征值与分子的稳定性密切相关 ([24]). 在理论物理和量子力学的许多问题中也提出对图谱理论进行研究的迫切要求，如 Hamilton 系统中的最小能量问题 ([22]). 总而言之，图的 Laplacian 谱是一个重要的研究课题.

**定义** 1.1.9: 设集合 $X$ 和 $Y$ 是图 $G$ 顶点集 $V(G)$ 的子集，令

$$E(X,Y) = \{(u,v) \in E(G) \mid u \in X, v \in Y\}$$

记 $\partial X = E(X, \bar{X})$, 其中 $\bar{X}$ 表示 $X$ 在 $V(G)$ 中的补集. 称量 $\min\limits_{X} \frac{|\partial X|}{|X|}$ 为图 $G$ 的等周数，记作 $i(G)$, 其中 $X$ 取遍所有 $|X| \leq \frac{1}{2}|V(G)|$ 的非空子集. 计算图的等周数是也一个 NP-hard 的问题 ([16]). 显然 $i(G) \leq \delta(G)$.

等周数还有以下对称形式： $i(G) = \min \frac{|E(X,Y)|}{\min(|X|,|Y|)}$, 其中 min 取遍所有的非空子集 $X$ 和 $Y$, 而且 $X, Y$ 满足条件： $X, Y \in V(G)$, 且 $X \bigcup Y = V(G)$.

等周数来源于几何学中的等周问题，几何中的等周问题是古希腊数学家所研究的最早问题之一，即在定长的闭曲线中求一闭曲线，使之围成的面积最大. 图的等周问题本质上与此相同. Mohar 类似于 Riemann 流形研究中得到 Cheeger 不等式的方法，细致分析图 $G$ 的次小 Laplacian 谱 $\lambda_2(G)$ 的特征向量的正负分量和图的边割之间的关系，得到了用 $\lambda_2(G)$ 来估计 $i(G)$ 的不等式 ([16]), 此不等式是 Riemann 流形上 Laplacian 算子研究中的 Cheeger 不等式的离散类似，因而也称为 Cheeger 型不等式.

金芳蓉教授 ([21]) 把 Mohar 的结果推广到一般情形，她在图的等周数方面也做出了很多好的工作 (见文献 [19-21]).

**定义** 1.1.10: 设 $G$ 和 $G'$ 是两个分别具有结点集 $V$ 和 $V'$ 的图，若存在一个双射 $h: V \longrightarrow V'$, 使得当且仅当 $(v_i, v_j)$ 是 $G$ 中边时， $(h(v_i), h(v_j))$ 是 $G'$ 中的边，则称 $G'$ 同构于 $G$, 记作 $G \cong G'$(或 $G = G'$).

本文所讨论的图 (除非特别说明) 皆为简单无向图.

## §1.2 基本结论

这一小节我们介绍一些非常有用的基本结论.

由于图 $G$ 的 Laplacian 矩阵 $L(G)$ 是实对称矩阵，因此其特征值全为实数，有以下重要结论.

**定理** 1.2.1[13] 设图 $G$ 的全体 Laplacian 谱为： $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ , 其中 $n = |V(G)|$, 则 1)$\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n$ ; 2)$\lambda_1 = 0$ ; 3) $\lambda_2 > 0$ 的充要条件是图 $G$ 连通.

**证明** 由 $L(G) = D(G) - A(G)$ 是半正定矩阵，1) 成立; 显然 $|L(G)| = 0$, 因此 2) 成立； 3) 成立是由矩阵 - 树定理的推论. ■

**定理** 1.2.2[12] 设连通图 $G$ 的全体 Laplacian 谱为： $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$, $n = |V(G)|$, 则 $R(G)=n\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{\lambda_i}$.

**定理** 1.2.3[2] 图 $P_n$ 的谱为 $2\cos\frac{\pi}{n+1}i$, $i=1,2,\cdots,n$.

**定理** 1.2.4[2] 图 $C_n$ 的谱为 $2\cos\frac{2\pi}{n}i$, $i=1,2,\cdots,n$.

**定理** 1.2.5[2] 图 $C_n$ 的 Laplacian 谱为 $2-2\cos\frac{2\pi}{n}i$, $i=1,2,\cdots,n$.

**定理** 1.2.6[2] (矩阵 - 树定理) $n$ 阶图 $G$ 的生成树的数目等于其 Laplacian 矩阵 $L(G)$ 的任何一个 $(n-1)$ 阶子式. 特别地，图 $G$ 的生成树的数目等于 $\frac{1}{n}\lambda_2\cdots\lambda_n$.

**定理** 1.2.7[16] 设 $G$ 是阶 $n$ 图，其最大度为 $\Delta(G)$. 如果 $G\neq K_1, K_2$ 或 $K_3$, 则 $i(G)\leq\sqrt{\lambda_2(2\Delta(G)-\lambda_2)}$.

本章中没有给出的符号和定义，我们将在适当的地方给出.